

12/12/15

Λήμμα 1^η

Λήμ. $n \in \mathbb{N}$ τότε: n απλός $\Leftrightarrow \sum_{d|n} \mu(d)g(d) = 0$

Μύση

Λήμ. $f \in \mathcal{M}$. Τότε $\sum_{d|n} \mu(d)f(d) = (1-f(p_1)) \cdots (1-f(p_k))$

οπου

$$n = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k} > 1$$

Λήμ.

$$n=1 \quad \sum_{d|1} \mu(d)f(d) = 1$$

Επίδειξη

$$\begin{aligned} \sum_{d|n} \mu(d)g(d) &= (1-g(p_1))(1-g(p_2)) \cdots (1-g(p_k)) = \\ &= (1-(p_1-1)) \cdots (1-(p_k-1)) = \\ &= (2-p_1) \cdots (2-p_k) \end{aligned}$$

Λήμ.

$$n > 1, \text{ τότε } \sum_{d|n} \mu(d)g(d) = 0 \Leftrightarrow (2-p_1) \cdots (2-p_k) = 0$$

$$\Leftrightarrow \exists i=1, \dots, k : 2-p_i = 0 \Leftrightarrow \exists i=1, \dots, k, p_i = 2$$

Αρα

$$n \text{ απλός } n > 1 \Leftrightarrow \sum_{d|n} \mu(d)g(d) = 0$$

Λήμμα 2^η

$$\text{Να δείξει ότι: } \sum_{d|n} \frac{\mu^2(d)}{g(d)} = \frac{n}{g(n)}$$

Προσέχουμε ότι $\mu, g \in \mathcal{M}$. Είδαμε ότι $\mu^2: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$

$$\mu^2(n) = \mu(n)^2 \text{ και } \mu^2 \in \mathcal{M}$$

Επίσης,

Ευρίσκω $g(n) \neq 0 \quad \forall n \geq 1$ ορίζω $n = \frac{b^2}{g} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$

$$\left(\frac{b^2}{g} \right)(n) = \frac{b^2(n)}{g(n)} \text{ και } \frac{b^2}{g} \in m$$

τοτε

και η συνάρτηση.

$$F: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C} \quad F(n) = \sum_{d|n} \frac{b^2(d)}{g(d)}, \text{ ορίζω } 600 \text{ m}$$

Αν $n=1$ τότε

$$F(1) = \sum_{d|1} \frac{b^2(d)}{g(d)} = 1 \Rightarrow F(1) = 1$$

Αν $n > 1$, τότε

$n = p_1^{a_1} \dots p_k^{a_k}$ θα είναι η αντιστοίχηση αντιστοιχία του n και ευρίσκω $F \in m$ θα έχουμε.

$$F(n) = F(p_1)^{a_1} \dots F(p_k)^{a_k} \quad (1)$$

Εο υπολογισμός του $F(p^a)$ $p \rightarrow \text{πρώτος}$
 $a \geq 1$

$$F(p^a) = \sum_{d|p^a} \frac{b^2(d)}{g(d)} = \frac{b^2(1)}{g(1)} + \frac{b^2(p)}{g(p)} + \frac{b^2(p^2)}{g(p^2)} + \dots + \frac{b^2(p^a)}{g(p^a)} =$$

$$\left. \begin{array}{l} b(p^k) = 0, \forall k \geq 2 \Rightarrow \\ b^2(p^k) = b(p^k)^2 = 0, \forall k \geq 2 \end{array} \right\} = \frac{1}{1} + \frac{1}{p-1} = \frac{p-1+1}{p-1} = \frac{p}{p-1}$$

$p \rightarrow \text{πρώτος}$

$$F(p^a) = \frac{p}{p-1} \quad (2)$$

Από τις (1) και (2)

$$\Rightarrow F(n) = \frac{p_1}{p_1-1} \frac{p_2}{p_2-1} \dots \frac{p_k}{p_k-1} = \frac{p_1^{a_1} \dots p_k^{a_k}}{p_1^{a_1-1} p_2^{a_2-1} \dots p_k^{a_k-1} (p_1-1) \dots (p_k-1)} = \frac{n}{g(n)}$$

Aufgaben 3^n

a) $\sum_{d|n} \frac{b(d)}{d}$

y) $\sum_{d|n} b(d) \phi(d)$

b) $\sum_{d|n} b(d) \tau(d)$

8) $\sum_{d|n} d b(d)$

Lösung

a) $\sum_{d|n} b(d) f(d) = (1 - f(p_1)) \dots (1 - f(p_k))$

$n = p_1^{a_1} \dots p_k^{a_k} \quad (1)$

Betrachte $f: N \rightarrow \mathbb{C}$, $f(n) = \frac{1}{n}$ das heißt $f \in \mathcal{M}$.
 Dann

n-Erweiterung $b \cdot f: N \rightarrow \mathbb{C}$, $(b \cdot f)(n) = b(n) f(n) = \frac{b(n)}{n} \in \mathbb{C}$

oder

höher auch emv (1) da erhalte:

$\sum_{d|n} \frac{b(d)}{d} = (1 - f(p_1)) \dots (1 - f(p_k)) =$

$= \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) =$

$= \frac{p_1 - 1}{p_1} \dots \frac{p_k - 1}{p_k}$, da $n = p_1^{a_1} \dots p_k^{a_k} > 1$

$f(n)/n$ also $\sum_{d|n} \frac{b(d)}{d} = \frac{f(n)}{n}$

Ar

$n=1$, dann $\sum_{d|1} \frac{b(d)}{d} = \frac{b(1)}{1} = 1$

b) $b, \tau \in \mathcal{M}$ dann wäre

$\sum_{d|n} b(d) \tau(d) = (1 - \tau(p_1)) \dots (1 - \tau(p_k)) =$

$$= (1-2) \dots (1-2) = (-1) \dots (-1) = (-1)^k$$

$$n = p_1^{a_1} \dots p_k^{a_k}, \text{ τότε } \sum_{d|n} \mu(d) \tau(d) = (-1)^k$$

$$n=1 \quad \sum_{d|1} \mu(d) \tau(d) = 1$$

Το (γ) έχει γίνει σε υποχρεωτικό λέντα.

$$\beta) \sum_{d|n} d \mu(d) \stackrel{(\gamma)}{=} (1 - i(p_1)) \dots (1 - i(p_k)) =$$

$$= (1 - p_1) \dots (1 - p_k), \text{ αν } n = p_1^{a_1} \dots p_k^{a_k} > 1$$

$$\left. \begin{array}{l} i: N \rightarrow \mathbb{C}, i(n) = n \\ i \in m \end{array} \right\} = \sum_{d|n} d \mu(d) = 1.$$

Άσκηση 4^η

Α. Εξάγωνο $g(x) = 2, 4, 6, 8, 10, 12$, είναι άνω 600 N.
 Β. Εξάγωνο $g(x) = 14$ δεν έχει άνω 600 N.

Μύον

Παραδείγματα:

$$g(3) = 2$$

$$g(5) = 4$$

$$g(7) = 6$$

$$g(11) = 10$$

$$g(13) = 12$$

$$g(15) = g(3) \cdot g(5) = 2 \cdot 4 = 8$$

Εάν οι υπαρκτοί $n \in \mathbb{N}$, $g(n) = 14$.

Τότε $n > 1$, τότε $g(1) = 1$
Εστω ότι:

$$n = p_1^{a_1} \dots p_k^{a_k} \text{ η πρωτογενής αναγωγή του } n.$$

Τότε

$$g(n) = 14$$

$$p_1^{a_1-1} \dots p_k^{a_k-1} (p_1-1) \dots (p_k-1) = 14$$

$$\forall 14 \Rightarrow \forall p_1^{a_1-1} p_k^{a_k-1} (p_1-1) \dots (p_k-1)$$

$$\Rightarrow \forall p_i^{a_i-1} \text{ ή } \forall p_i-1 \text{ για κάποιο } i=1, \dots, k$$

1) Αν $\forall p_i^{a_i-1}$, τότε είδαμε $\forall$ πρώτος $\Rightarrow p_i = \forall$

$$\Rightarrow p_i-1 = 3 \text{ Είδαμε } p_i-1/14 \Rightarrow 6/14 \text{ άρα}$$

2) Αν $\forall p_i-1 \Rightarrow \exists s \in \mathbb{N} : p_i-1 = \forall \cdot s \Rightarrow p_i = \forall s + 1$

• Αν $s=1 \Rightarrow p_i = \forall \cdot 1 + 1 = 8 \rightarrow$ Δεν είναι πρώτος

• Αν $s=2 \Rightarrow p_i = \forall \cdot 2 + 1 = 15 \quad \text{---//---}$

• Άρα $s \geq 3 \Rightarrow p_i = \forall s + 1 \geq \forall \cdot 3 + 1 = 22$

$$\Rightarrow p_i-1 \geq 21. \text{ Είδαμε } p_i-1/14 \Rightarrow$$

$$p_i-1/14 \rightarrow \text{άρα}$$

Άρα

$$\forall n \in \mathbb{N} : g(n) = 14$$

Τελείοι Αριθμοί ~ Πρώτοι του Mersenne

$G: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$, $G(n)$ = άραφα των γραμμών διαμερών

$$\text{των } N = \sum_{d|n} d$$

Τότε $\sigma(n) - n$: αθροισμα των γνησίων
διαρρέων του n .

$$\sigma(n) - n < n \quad \textcircled{\text{I}}$$

$$\sigma(n) - n = n \quad \textcircled{\text{II}}$$

$$\sigma(n) - n > n \quad \textcircled{\text{III}}$$

Ⓘ: Υπάρχουν αμέτρητοι φυσικοί αριθμοί n : $\sigma(n) - n < n$,
για παράδειγμα:

Όλοι οι πρώτοι αριθμοί:

$$\forall p: \text{πρώτος } \sigma(p) - p = 1 + p - p = 1 < p$$

ⓓ: Υπάρχουν σκεραίοι φυσικοί αριθμοί n : $\sigma(n) - n > n$
για παράδειγμα οι αριθμοί: $n = 2^k \cdot 3$, $k \geq 2$.
Δίνει:

$$\sigma(2^k \cdot 3) \stackrel{\sigma \in m}{=} \sigma(2^k) \cdot \sigma(3) =$$
$$(2^{k+1} - 1) \cdot 4 = (2^{k+1} - 1) 2^2$$

Τότε

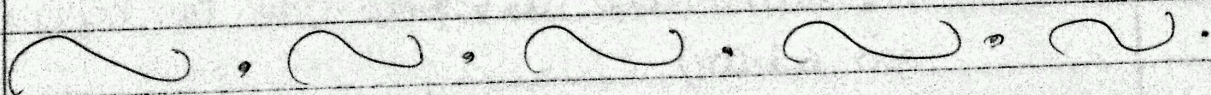
$$\sigma(n) - n = \sigma(2^k \cdot 3) - 2^k \cdot 3 = (2^{k+1} - 1) 2^2 - 2^k \cdot 3 > 2^k \cdot 3$$

Ⓙ: Αποδείξτε:

Ορισμός

Ένας φυσικός αριθμός n कहलैται τέλειος $\Leftrightarrow$

$$\sigma(n) - n = n, \text{ δηλαδή } \sigma(n) = 2n$$



Μέχρι το 5 δεν υπάρχουν τέλειοι:

• Διαρρέες του 6: 1, 2, 3, 6

Av $n=6$: $\sigma(n) = \sigma(6) = 1+2+3+6 = 2 \cdot 6 = 2n$

$\Rightarrow n=6$: τέλειος

• Διαπετες του 28: 1, 2, 4, 7, 14, 28

Av $n=28$, τότε $\sigma(n) = 1+2+4+7+14+28 = 2 \cdot 28 = 2n$

$\Rightarrow n=28$: τέλειος

Ανοιχτά Πρόβλημα

Δεν είναι γνωστό αν το σύνολο των τέλειων αριθμών είναι άπειρο.

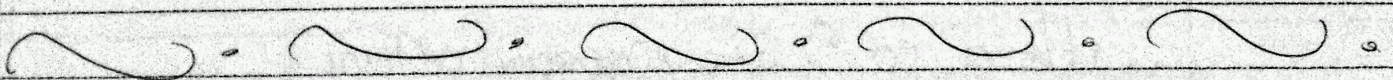
Οι μέχρι τώρα γνωστοί τέλειοι αριθμοί είναι 6ε ωνός 48.

(Ο μεγαλύτερος τέλειος αριθμός βρέθηκε το 2013, με ωνός γινών: 17 425 170).

Ανοιχτά Πρόβλημα

Υπάρχουν άπειροι τέλειοι αριθμοί?
(Όχι οι γνωστοί είναι αρτία)

$\rightarrow$ Av υπάρχει άπειρος τέλειος αριθμός, αυτός ωγείει να είναι $> 10^{500}$ (Ο αριθμός αυτός είναι μεγαλύτερος από το ωνός όλων των κοπίων στο σύστημα).



Θεώρημα [Ευκλείδης - Euler]

Έστω $n \in \mathbb{N}$. Τότε:

n : άρτιος τέλειος αριθμός $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow n = 2^{k-1} (2^k - 1), \text{ όπου } k \geq 2, 2^k - 1: \text{ άρτιος.}$$

Απόδειξη

" $\Leftarrow$ " (Αντί n κατασκευάζω ως εξής έναν άρτιο)

Έστω $n = 2^{k-1} (2^k - 1)$ $k \geq 2, 2^k - 1$: άρτιος

$$\phi(n) = \phi(2^{k-1} (2^k - 1)) \stackrel{(2^{k-1}, 2^k - 1) = 1}{=} \phi(2^{k-1}) \phi(2^k - 1) = 1$$

$$\phi(2^{k-1}) \phi(2^k - 1) = (1 + 2 + \dots + 2^{k-1}) (1 + 2^{k-1}) =$$

$$= (2^k - 1) \cdot 2^k = \underbrace{2 \cdot 2^{k-1} (2^k - 1)}_n = 2n$$

Άρα

0 n : (άρτιος) τέλειος.

" $\Rightarrow$ " (Αντί n κατασκευάζω ως εξής έναν άρτιο)

Έστω n τέλειος άρτιος αριθμός. Τότε: $n = 2^{k-1} \cdot m$,
όπου $k \geq 2$ και m άρτιος

Είδετον

$$0 \text{ } n \text{ τέλειος} \Rightarrow \phi(n) = 2n.$$

Τότε

$$\phi(n) = \phi(2^{k-1} \cdot m) \stackrel{\phi \in \mathbb{M}}{=} \phi(2^{k-1}) \phi(m) =$$

$$= (1+2+\dots+2^{k-1})g(m) = (2^k-1)g(m) \Rightarrow$$

$$g(n) = (2^k-1) \cdot g(m) \quad (1)$$

$$g(n) = 2n \Rightarrow 2 \cdot 2^{k-1} \cdot m \stackrel{(1)}{=} (2^k-1)g(m) \Rightarrow$$

$$2^k \cdot m = (2^k-1)g(m) \quad (2)$$

Τότε

$$\frac{2^{k-1}}{(2^k-1, 2^k)} = 1 \stackrel{\text{ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ}}{\Rightarrow} \frac{2^{k-1}}{2^k} = \frac{2^k-1}{m} \Rightarrow m = (2^k-1) \cdot m \text{ για κάποιο } m \in \mathbb{N}$$

Τότε

$$(2) \quad 2^k m = 2^k (2^k-1) m = (2^k-1)g(m) \Rightarrow$$

$$g(m) = 2^k \cdot m \quad (3)$$

Τότε

$$m, m' \mid m \text{ και } m+m' = (2^k-1)m' + m' =$$

$$= m' (2^k-1+1) = m' 2^k \stackrel{(3)}{=} g(m')$$

Άρα

Οι διαιρετές m, m' έχουν αθροιστά

$g(m) =$ Το αθροιστά όλων των γνήσιων διαιρετών του $m \Rightarrow$

Α m και m' είναι οι λαοί διαιρετές του $m \Rightarrow$
 m πρώτος και βέβαια $m' \leq m \Rightarrow m=1$

Άρα

$$m = 2^k + 1 : \text{πρώτος}$$

$$n = 2^{k-1} \cdot m = (2^{k-1})(2^k+1) \text{ και } 2^{k-1} \text{ πρώτος.}$$

$$f: \{2^{k-1}(2^k-1) \in \mathbb{N} \mid 2^{k-1} \text{ : πρώτος}\} \rightarrow \{\text{Άπειροι τέλει}\}$$

Είναι "1-1" και επί

$$2^{k-1}(2^k-1) \rightarrow 2^{k-1}(2^k-1) \text{ άπειρος τέλειος}$$

$$g: \{2^k-1 \in \mathbb{N} \mid 2^k-1 \text{ : πρώτος}\} \rightarrow \{\text{Άπειροι τέλει}\}$$

$$g(2^k-1) = 2^{k-1}(2^k-1) \text{ είναι 1-1 και επί.}$$

Ορίσμος

Ένας αριθμός n καλείται πρώτος του Mersenne $\Leftrightarrow$ είναι πρώτος της μορφής 2^{k-1} , $k \geq 2$.

Άρα

υπάρχει "1-1" και επί αντιστοιχία βέως
πρώτους του Mersenne και βέως άπειρους
τέλειους αριθμούς.

$$\bullet k=2 \Rightarrow 2^2-1=3 : \text{πρώτος του Mersenne} \Rightarrow$$

$$2^{2-1}(2^2-1) = 2 \cdot 3 = 6 \text{ άπειρος τέλειος}$$

$$\bullet k=3 \Rightarrow 2^3-1=8-1=7 : \text{πρώτος του Mersenne.}$$

$$\text{και } 2^{3-1}(2^3-1) = 28, \text{ άπειρος τέλειος}$$

$$\bullet k=4 \Rightarrow 2^4-1=15 \rightarrow \text{δεν είναι πρώτος}$$

$$\bullet k=5 \Rightarrow 2^5-1=32-1=31 \rightarrow \text{είναι πρώτος του Mersenne}$$

$$2^4(2^5-1) = 496 \rightarrow \text{άπειρος τέλειος}$$

Παρατήρηση

Αν $n = 2^{p-1}$ είναι πρώτος, τότε ο αριθμός
 p είναι πρώτος

Εάν οι p δεν είναι πρώτος

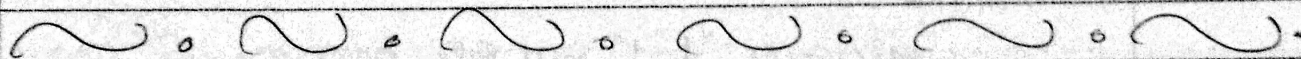
$$\Rightarrow p = k \cdot \lambda, \text{ όπου } 1 \leq k, \lambda < p.$$

Τότε

$$n = 2^p - 1 = 2^{k \cdot \lambda} - 1 = (2^k)^\lambda - 1 = (2^k - 1)$$

$$\cdot (2^{k(\lambda-1)} + \dots + 2^k + 1) \Rightarrow \text{αριθμο}$$

γιατί ο n είναι πρώτος και p είναι πρώτος.



Υπάρχουν 48 γνωστοί αριθμοί του Mersenne και
ο μεγαλύτερος από αυτούς:

57.885.161
2 -1

ανακαλύχθηκε τον Γενάρη του '13

Προγραμμα GIMPS = Great Internet Mersenne
Prime Search

